UM JOGO BINOMIAL

1. INTRODUÇÃO

São muitos os casos de aplicação, no cotidiano de cada um de nós, dos conceitos de probabilidade. Afinal, o mundo é probabilístico, não determinístico; a natureza acontece ao acaso, nossa vida diária está exposta ao acaso, não a fatos pré-determinados. Somos seres que vivem o “provável”, não o determinado. A Ciência dá tanta importância aos acontecimentos aleatórios que desenvolveram toda uma área de conhecimento para estudar os eventos prováveis: a Estatística e, dentro dela, o estudo das probabilidades.

O ensino tradicional não reforça o raciocínio probabilístico, passando, muitas vezes, a noção de que o mundo segue leis rígidas que podem prever os acontecimentos futuros, e que entre o “verdadeiro” e o “falso” existe um grande vazio. A natureza não é bem assim. Entre o “verdadeiro” e o “falso” existe o “mais ou menos”, o “quase certo”, o “pode ser que seja assim”, o “talvez”. Não é raro ver alunos se surpreenderem, no estudo da Estatística, com a noção do “provável”, do “talvez sim”, ao verificarem que esses conceitos estão muito mais próximos de seus cotidianos do que as rígidas leis de formação dos fenômenos, que muitas vezes a própria Ciência costuma passar. O próprio ensino das ciências, em sua forma tradicional, não dá muita importância ao estudo dos fenômenos probabilísticos, e não aborda a Estatística como uma “ciência do cotidiano”, mas sim como mais uma das matemáticas determinísticas.

A consequência disso é a tendência de grande parte dos alunos de 3º grau a decorar fórmulas e procedimentos matemáticos, ao invés de considerar, na análise dos fenômenos do cotidiano, a possibilidade de “não ser”, ou de “ser diferente”, ou do “provável”, objeto de estudo da Estatística. Além disso, em um sistema de ensino tradicional como é o brasileiro, o professor muitas vezes é um mero repassador de conteúdos, o que não favorece o desenvolvimento do raciocínio crítico, do método científico, do “poder fazer diferente”. Uma forma mais criativa de ensinar é ligar a aprendizagem a algo mais lúdico, a algo que tenha relação com o cotidiano das pessoas, para que aprender possa ser também divertido e prazeroso. Aprender não pode ser apenas uma grande brincadeira, mas há que ter uma boa dosagem de prazer, para que o interesse dos alunos seja despertado. Tornar simples conceitos complicados é complicado! Ser simples é complicado! O presente trabalho acadêmico, desenhado para o aprendizado das *Distribuições Binomiais de Probabilidades*, tenta trazer para a sala de aula uma maneira simples e lúdica de calcular probabilidades em uma distribuição discreta, em que os conceitos vão sendo construídos aos poucos, pelos próprios alunos.

2. METODOLOGIA

É da professora doutora Dinara W. Xavier Fernandez (Universidade Federal do Rio Grande do Sul / Departamento de Estatística) a autoria de um jogo simples, com o objetivo de descobrir a Distribuição Binomial (*Distribuição de Newton*), aplicável em cursos introdutórios de Estatística para o 3º grau.

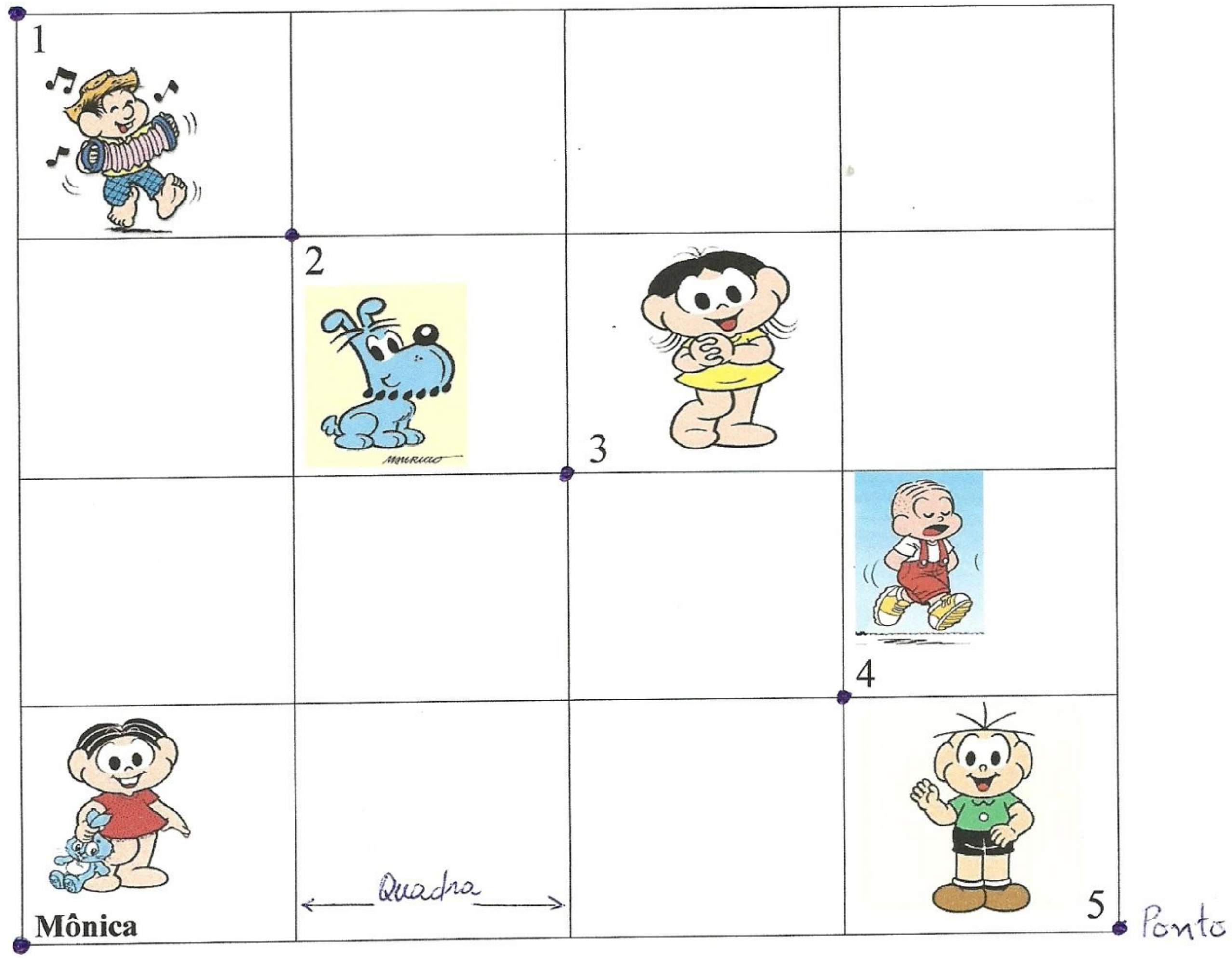
Este material se baseia nessa publicação da Profª. Dra Dinara Fernandez e tem o objetivo de esclarecer, aos alunos, o conteúdo teórico mais importante, necessário ao entendimento e pleno aproveitamento do *jogo de empreendimento* que será realizado no decorrer da disciplina “Análise Estatística”, visando à aprendizagem construtivista do tema “Distribuições Discretas de Probabilidades”, em particular da *Distribuição Binomial*.

O jogo prevê a organização dos alunos em grupos pequenos, orientados no sentido de seguir as instruções dadas pelo professor, e responder algumas questões a partir de uma atividade relacionada a uma ficha (cartaz) confeccionada previamente. O objetivo é permitir que o aluno descubra os conceitos da *Distribuição Binomial*, até mesmo em sua forma mais generalizada, de uma forma natural. Este é o processo inverso do ensino tradicional, onde é o professor que apresenta os conceitos e os alunos simplesmente os aceitam. Nesta atividade, o aluno vai descobrindo e construindo, ele próprio, os conceitos necessários.

3. MATERIAL E ASPECTOS TEÓRICOS ENVOLVIDOS

3.1 – O Cartaz

Os alunos são distribuídos em equipes, e cada equipe receberá um cartaz, igual ao que é apresentado na figura a seguir. O cartaz deve ter as dimensões apresentadas na figura, e simula um tabuleiro, onde, para se caminhar para o "norte" (para cima, na vertical), é preciso obter um número par no lançamento do dado.



3.2 – Aspectos Teóricos Envolvidos nos Procedimentos Operacionais do Jogo

O jogo consiste em fazer com que Mônica, localizada no extremo esquerdo inferior do tabuleiro, encontre seus amigos, todos localizados a 4 "quadras" de distância do ponto onde ela se encontra. Mônica tem 5 amigos, todos eles parados em pontos equidistantes de onde ela se encontra. Para visitar seus amigos, Mônica precisa caminhar pelas "quadras". Para isso, faz-se necessário jogar uma moeda ou um dado. Se der "cara" na moeda ou se der "par" no dado, Mônica caminha uma quadra para o "norte" (para cima, no tabuleiro); se der "coroa" na moeda ou se der "ímpar" no dado, Mônica caminha para o "leste" (para a direita, no tabuleiro).

A cada lançamento da moeda ou do dado, Mônica caminha uma "quadra", ou para o "norte" ou para o "leste". É preciso lançar a moeda ou o dado várias vezes, obedecendo para isso a *Lei dos Grandes Números*, estudada na primeira Unidade. Só para lembrar, a *Lei dos Grandes Números* estabelece, por exemplo, que:

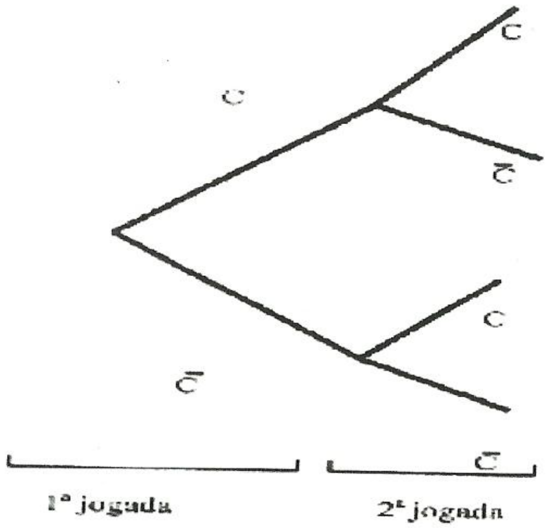
> ***Se em n lançamentos de uma moeda "honesta" obtivermos 529 caras, então a probabilidade calculada de sair cara até o milésimo lançamento é de 529/1.000 = 0,529. Se lançarmos a mesma moeda mais 1.000 vezes e obtivermos 493 caras, então a probabilidade de sair cara até o lançamento de número 2.000 é: (529+493)/2.000 = 0,511. O número 0,511 é mais próximo da probabilidade "teórica" de sair cara em qualquer lançamento de uma moeda, do que o número 0,529. Isso se dá porque, quanto maior for o número de lançamentos, mais próximo do valor teórico será o valor observado.***

Os alunos devem, então, anotar a sequência obtida de números obtidos no dado, bem como das correspondentes "quadras avançadas", até que Mônica encontre o primeiro amigo dela, postado no tabuleiro. Depois de encontrado o 1º amigo, a moeda ou o dado deve ser lançado novamente, em nova sequência similar à primeira, até que Mônica encontre um novo amigo (ou o mesmo, se for o caso), sempre anotando a quantidade de lançamentos da moeda ou do dado, com os correspondentes avanços de "quadras", tanto para o "norte" quanto para o "leste". Este procedimento deve ser repetido tantas vezes quantas forem necessárias, até que Mônica encontre todos os seus amigos. Note que é possível Mônica encontrar o mesmo amigo mais de uma vez, sem ter encontrado um outro diferente na sequência. Por isso é preciso anotar todos os encontros, ou seja, é necessário anotar, em cada sequência de lançamentos, qual foi o amigo encontrado e quantas vezes foi lançada a moeda ou o dado, naquela sequência.

Depois de encontrados todos os amigos, o jogo sai então da fase "operativa" para a fase de aplicação da teoria. Para isso, foram preparadas algumas questões, tentando fazer com que o aluno reflita sobre os resultados que encontrou, em comparação com os resultados teóricos que seriam obtidos. Essa "aproximação da prática com a teoria" é que vai, aos poucos, construindo o conceito da Distribuição Binomial, já que esse tipo de distribuição discreta de probabilidades supõe: (a) dois resultados possíveis a cada rodada (no caso, avanço para o "norte" ou para o "leste"); (b) independência dos resultados intermediários (no caso, o fato de ter avançado para o "norte" em uma jogada não interfere no próximo avanço, que tanto pode sair para o "norte", quanto para o "leste"); (c) todos os resultados têm a mesma probabilidade de ocorrer (no caso, cada avanço em uma jogada tem sempre 50% de chance de ocorrer, pois ou avança para o "norte" ou para o "leste"); (d) o número de tentativas deve ser conhecido e fixo (no caso, é o número de jogadas necessárias para que Mônica encontre um de seus amigos; como todos eles estão equidistantes dela, a número de jogadas necessárias ao encontro será sempre o mesmo).

Neste ponto, o jogo questiona alguns valores teóricos, como por exemplo a "facilidade" de encontrar este ou aquele amigo de Mônica: a "rapidez" ou "facilidade" de encontrar cada personagem é traduzida pelo número de encontros que ocorreram na quantidade de rodadas que será combinada com o professor. Quanto mais encontros Mônica tiver com um determinado amigo, maior é a probabilidade teórica de encontrá-lo, mesmo ele estando equidistante dos demais.

A "distribuição" das probabilidades também é questionada, não só o valor que ela assume no encontro com cada personagem. Para isso, os alunos são solicitados a definirem, no tabuleiro, de quantas maneiras Mônica pode chegar a cada um de seus amigos, ou seja, quais são os caminhos possíveis para encontrar cada um dos amigos. Esses são os valores de "x" na expressão matemática da Distribuição Binomial. Por exemplo, se jogarmos uma moeda, em duas rodadas são os seguintes os resultados possíveis:



O que os alunos fazem é "contar" o número de caras (no lançamento da moeda) ou a quantidade de números pares obtidos no lançamento de um dado. Chamando x = número de "caras" ou de "números pares" nos "n" lançamentos da moeda ou do dado, "p" seria, portanto, a probabilidade de obter "cara" ou "par" em um único lançamento, e "q" seria, consequentemente, a probabilidade de obter "coroa" ou "ímpar" em um único lançamento da moeda ou dado: q = 1 – p.

No primeiro lançamento da moeda ou do dado, n = 1; x = número de "caras" ou de "par" no dado, em 1 lançamento, que ou é igual a 0 ou igual a 1. O aluno, neste primeiro lançamento, é questionado a dizer "*quantas maneiras existem de x =0*", ou, em outras palavras, quanto vale P(x=0). Da mesma forma, o aluno é questionado a mostrar "*quantas maneiras existem de x ser igual a 1*", ou, semelhantemente, quanto vale P(x=1).

No segundo lançamento, temos n = 2; x = número de "caras" ou "par" no dado, em 2 lançamentos, que ou é igual a 0, ou igual a 1 ou igual a 2. O entendimento de quantas maneiras existem para x=0 nada mais é do que o cálculo da probabilidade P(x=0); o mesmo raciocínio vale para P(x=1) e P(x=2). A analogia é imediata com a fórmula matemática da distribuição binomial, para n = 2, e "x" no intervalo entre 0 e 2.

O processo é repetido para o terceiro e o quarto lançamentos, de tal forma que o paralelo entre os resultados obtidos com os avanços de Mônica no tabuleiro e a expressão da Distribuição Binomial é imediato:

$$P(x) = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\; p^{x}\; q^{n-x} \qquad \text{(Equação 1)}$$

4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Após a realização do jogo, haverá discussão dos resultados no "grande grupo", formado por todos os alunos, para que se abra espaço para levantar dificuldades, pontos positivos e opiniões. A avaliação é individual, e depende das respostas às perguntas que forem feitas durante a atividade a cada participante. Incentiva-se a participação ativa, e os alunos serão avisados a se prepararem para responder, inclusive, como foi estabelecida, em sua equipe, a analogia entre os resultados obtidos com o dado (ou com a moeda) e a expressão matemática (Equação 1).

5. VARIANTES

O jogo pode ser modificado, também, utilizando um dado, mas com probabilidades "viciadas". Por exemplo, se der os números 1 ou 2, Mônica caminhará para o "norte"; se der os números 3, 4, 5 ou

6, Mônica caminhará para o “leste”. Neste caso, incentiva-se a verificação dos resultados, de tal forma a compará-los com os obtidos na versão anterior do jogo. Verificar como fica a distribuição das probabilidades no caso de “situações não aleatórias” (enviesadas) faz parte de um importante complemento da aprendizagem das distribuições de probabilidades. Vale salientar que, por definição, todas as distribuições, sejam elas discretas ou contínuas, só são válidas se houver, como premissa, a aleatoriedade dos resultados.

6. REFERÊNCIAS

FERNANDEZ, Profa. Dra. Dinara W. Xavier. “*O Prazer de Aprender Probabilidade Através de Jogos: Descobrindo a Distribuição Binomial*”. Publicação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (URGS) / Departamento de Estatística. Porto Alegre, 2008. Livre adaptação de Mário Celso N. Andrade, apenas para fins didáticos; FANESE, maio/2014.