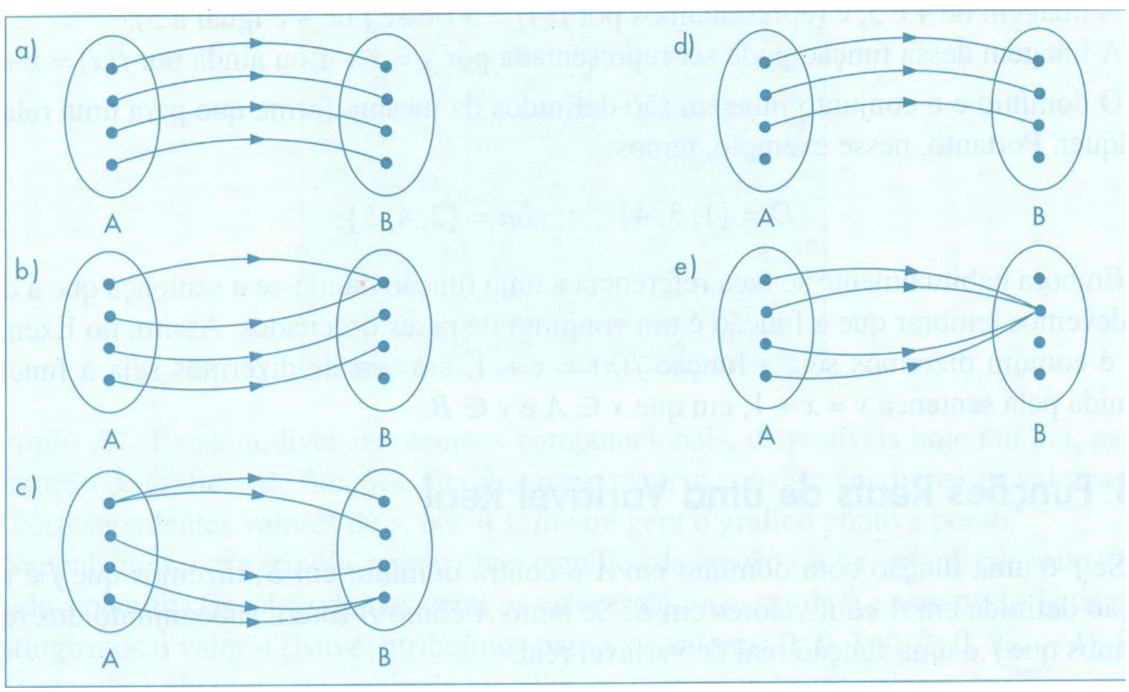
I. FUNÇÕES

1. DEFINIÇÃO

Dados dois conjuntos A e B , não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

f é aplicação de A em B $\Leftrightarrow \left(\forall x \in A, \exists \mid y \in B \mid (x, y) \in f \right)$

2. Diagrama de flechas para representar uma função



Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 43

Verificamos que as relações (a), (b), e (e) são funções de A em B, pois todo elemento de A tem um único elemento correspondente em B. Já as relações (c) e (d) não acontece isto, pois, existe elemento em A que não tem correspondência em B, como também tem elemento em A que tem mais de um correspondente em B, logo não são funções.

3. Conjunto domínio e conjunto imagem.

Em uma relação f de A em B podemos considerar dois novos conjuntos o domínio D_f e a imagem Im_f
O domínio de f é o conjunto dos elementos $x \in A$ para os quis existe um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. O conjunto imagem de f é o conjunto dos $y \in B$ para os quais existe um $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Em outras palavras, o domínio é o conjunto dos elementos de A que possuem um correspondente em B dados pela relação.

4. Funções Reais de uma Variável Real

Se f é uma função com domínio em A e contra domínio em B, dizemos que f é uma função definida em A com valores em B. Se tanto A como B forem subconjuntos dos reais dizemos que f é uma ***função real de variável real.***

Exemplo. Seja a função dada pela sentença $f(x) = 2x$ sendo o domínio o conjunto $A = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ e $B = \Re$.

Assim: $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, \cdots, f(n) = 2n$

Portanto o conjunto imagem é. $\mathrm{Im} = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$.

Exercícios de aplicação:

1. Dada a função $f(x) = 7x - 3$, com $D = R$, obtenha:

a) $f(a+b)$ b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ c) $f(0)$ d) $f(-1)$ e) $f\left(\sqrt{a}\right)$

2. Dada a função $f(x) = 2x - 3$, obtenha:

a) $f(3)$ b) $f(-4)$ c) o valor de x tal que $f(x) = 49$

3. Dada a função $f(x) = x^2$, obtenha:

a) $f(x_0)$ b) $f(x_0 + h)$ c) $f(x_0 + h) - f(x_0)$

4. Dada a função $f(x) = x^2 - 4x + 10$, obtenha os valores de x cuja imagem seja 7.

5. Uma livraria vende uma revista por \$ 5,00 a unidade. Seja x a quantidade vendida.

a) Obtenha a função receita $R(x)$
b) Calcule $R(40)$

c) Qual a quantidade que deve ser vendida para dar uma receita igual a $ 700,00?

6. O custo de fabricação de x unidades de um produto é dado pela função $C(x) = 100 + 2x$.

a) Qual o custo de fabricação de 10 unidades?
b) Qual o custo de fabricação da décima unidade, já tendo sido fabricadas nove unidades

7. Chama-se custo médio de fabricação de um produto ao custo de produção dividido pela quantidade produzida. Indicando o custo médio correspondente a x unidades produzidas por $C_{me}(x)$, teremos: $C_{me}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
O custo de fabricação de x unidades de um produto é $C(x) = 500 + 4x$.

a) Qual o custo médio de fabricação de 20 unidades?
b) Qual o custo médio de fabricação de 40 unidades?
c) Para que valor tende o custo médio à medida que x aumenta?

8. Em determinado país o imposto de renda é igual a 10 % da renda até $ 900,00. Para rendas acima de $ 900,00, o imposto de renda é igual a $ 90,00 (10 % de $ 900,00) mais 20 % da parte da renda que excede $ 900,00.

a) Qual o imposto de renda para uma renda de % 600,00?
b) Qual o imposto de renda para uma renda de % 1200,00?
c) Chamando de x a renda e de y o imposto de renda, obtenha a expressão de y em função de x.

5. Funções Crescentes, Decrescentes e Constantes.

Uma função é crescente num intervalo $[a,b]$ se a medida que aumenta o valor de x, dentro do intervalo, as imagens correspondentes também aumentam. Em outras palavras, f é crescente num intervalo $[a,b]$ se para quaisquer valores x_1 e x_2, do intervalo, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Analogamente f é decrescente num intervalo $[a,b]$ se para quaisquer valores x_1 e x_2, do intervalo, com $x_1 < x_2$, tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Se uma função tenha a mesma imagem em todos os pontos do intervalo $[a,b]$, dizemos que a função é constante naquele intervalo.

6. Função par e função impar

Se para todo x no domínio de uma função f, e $f(-x) = f(x)$ então f é uma função par.

Se para todo x no domínio de uma função f, e $f(-x) = -f(x)$ então f é uma função impar.

7. Pontos de Máximo e de Mínimo

Seja f uma função definida num domínio ***D***. Dizemos que x_0 é um **ponto de máximo relativo** (ou simplesmente ponto de máximo) se existir um intervalo aberto A, com centro em x_0 , tal que:

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in A \cap D$$

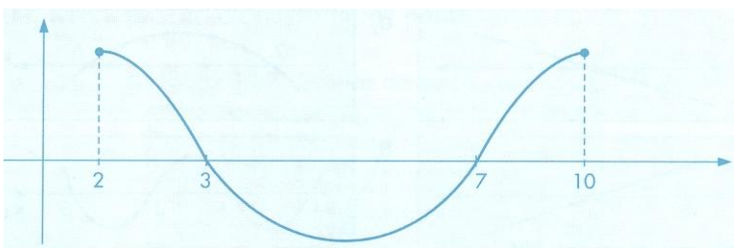
Analogamente, se $f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in A \cap D$ dizemos que x_0 é um **ponto de mínimo.**

8. Estudo do Sinal de uma Função

Estudar o sinal da função significa obter os valores de x para os quais $y > 0$ *ou* $y < 0$ ou $y = 0$

Por exemplo, seja f uma função definida no intervalo $[2,10]$ representada na figura abaixo:

Ilustração do sinal da função



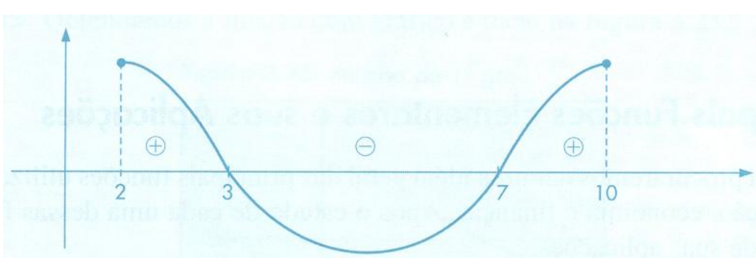
Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 53

$y > 0$ para $2 \leq x < 3$ ou para $7 < x \leq 10$;

$y < 0$ para $3 < x < 7$;

$y = 0$ para $x = 3$ ou $x = 7$.

Simbolicamente representamos conforme figura abaixo



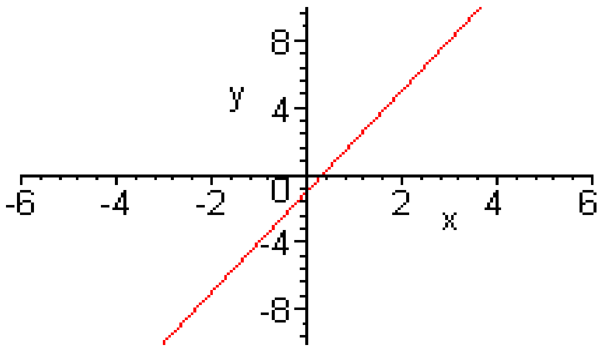
Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 53

9. Função polinomial do 1º Grau

Toda função da forma $y = mx + n$, com $m \neq 0$, é chamada de função do 1º grau ou função afim.

Verifica-se que o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta. Assim o gráfico pode ser obtido por meio de dois pontos distintos.

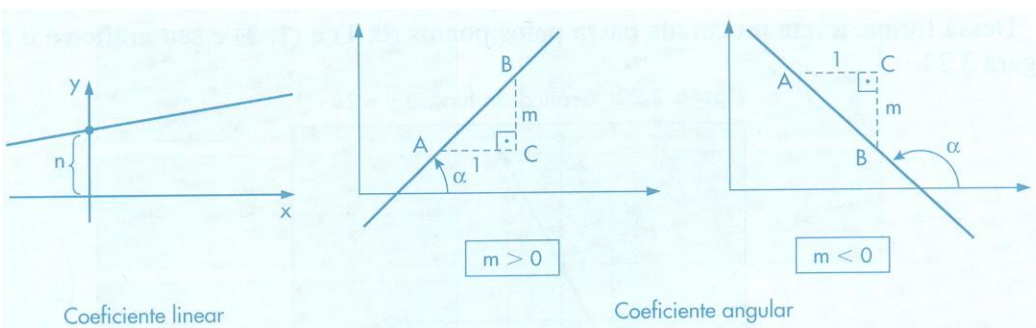
Exemplo: Vamos esboçar o gráfico da função $y = 3x - 1$



Observações:

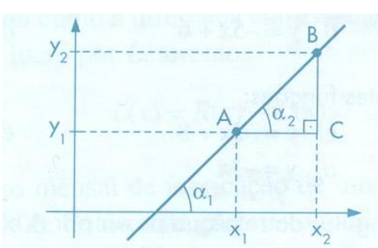
n – coeficiente linear (ponto de intersecção da reta com o eixo do y)
m – coeficiente angular (inclinação da reta com o eixo x)

Ilustração:



Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 56

Equação da reta:



$$y_1 = mx_1 + n$$
$$y_2 = mx_2 + n$$

Subtraindo membro a membro as equações acima temos:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 57

$$tg\alpha_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Como $tg\alpha_1 = m$ então $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Conhecendo um ponto $P(x_0, y_0)$ e o seu coeficiente angular m podemos escrever a equação, que representa a equação da reta que passa por um ponto $P(x_0, y_0)$, $y - y_0 = m(x - x_0)$

Exercícios de aplicação:

1. Esboce os gráficos das funções:

a) $y = 5$ b) $y = x + 1$ c) $y = 3x + 2$ d) $y = -x + 2$ e) $y = -3x$

f) $y = -5x + 6$ g) $y = 6 - 10x$ h) $\begin{cases} y = 2x, \ se\ x \geq 0 \\ y = x, \ se\ x < 0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} y = 2x + 1, \ se\ x \geq 1 \\ y = 3, \ se\ x < 1 \end{cases}$

2. Estude os sinais das seguintes funções:

a) $y = 2x - 6$ b) $y = 3x + 12$ c) $y = -2x + 8$ d) $y = -3x$ e) $y = 5x + 2$

3. Obtenha o coeficiente angular da reta que passa por A e B nos seguintes casos:

a) $A(1,2)$ e $B(2,7)$ b) $A(0,3)$ e $B(2,5)$ c) $A(-1,4)$ e $B(3,5)$
d) $A(-2,1)$ e $B(5,-2)$

4. Obtenha a equação da reta que passa por P e tem coeficiente angular m nos seguintes casos:

a) $P(1,3)$ e $m = 2$ b) $P(0,0)$ e $m = 3$ c) $P(-1,4)$ e $m = -1$
d) $P(-1,-2)$ e $m = 2$ e) $P(0,-4)$ e $m = -3$ f) $P(-2,0)$ e $m = -1$

5. Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:

a) $A(1,2)$ e $B(2,3)$ b) $A(-1,0)$ e $B(4,2)$ c) $A(2,1)$ e $B(0,4)$

10. Aplicações de Funções do 1º Grau

10.1. Funções Custo, Receita e Lucro

Sendo x a quantidade produzida de um produto, o custo total de produção vai depender de x , a relação entre eles chamamos de **função custo total** e indicamos pela letra **C**.
Custos que não dependem da quantidade produzida denominamos de **custa fixo** e é indicada por C_f
Os custos que depende de x chamamos de **custo variável** e indicamos por C_v
A soma do **custo fixo** com o **custo variável** denominamos de **custo total (C)** e representamos pela equação

$$\boxed{C = C_f + C_v}$$

O custo variável é igual a uma constante multiplicada por x. Essa constante é chamada de custo variável por unidade

A **Função receita** é o produto de x pelo preço de venda e indicamos pela letra **R**.

A função lucro é dada pela equação:

$$\boxed{L(x) = R(x) - C(x)}$$

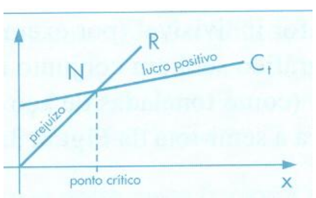
Exemplo. O custo fixo mensal de fabricação de um produto é R$ 500,00 e o custo varável por unidade é de R$ 5,00 . A função custo total é dada por:

$C(x) = 500 + 5x$

A função custo variável é dada por $C_v = 5x$

Se um produto é vendido por R$ 10,00 a unidade, a função receita é dada por $R(x) = 10x$

Quando o lucro for ZERO significa que a receita é igual ao custo $R(x) = C(x)$ a abscissa desse ponto é chamada de **PONTO DE NIVELAMENTO** ou **PONTO CRÍTICO,** observe o gráfico abaixo, onde **N** é o ponto de nivelamento.



Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 60

Margem de contribuição por unidade é a diferença entre o preço de venda e o custo variável por unidade

Exemplo: Sabendo-se que a margem de contribuição por unidade é R$ 3,00, o preço de venda é R$ 10,00 e o custo fixo é R$ 150,00 por dia, obtenha:

a) A função receita
b) A função custo total diário
c) O ponto de nivelamento.
d) A função lucro diário
e) A quantidade que deve ser vendida para que haja um lucro de R$$ 180,00 por dia.

Resolução:

Dados: $\text{Pr}\,eço \text{ de } venda = 10$, $\quad C_f = 150,00$

Margem de contribuição = R$ 3,00

$$C_v / unidade = preço\ de \text{ venda } - \text{ Margen de contribuição}$$
$$C_v / unidade = 10 - 3$$
$$C_v / unidade = 7$$

$$C_v = 7x$$

a) $R(x) = 10x$

b) $C = C_f + C_v$

$$C = 150 + 7x$$

c) $R(x) = C(x)$

$$10x = 150 + 7x$$

$$x = \frac{150}{3} = 50$$

d) $L(x) = R(x) - C(x)$

$$L(x) = 10x - (150 + 7x)$$
$$L(x) = 3x - 150$$

e) $L(x) = R(x) - C(x)$

$$180 = 10x - (150 + 7x)$$

$$180 = 10x - 150 - 7x$$
$$330 = 3x$$
$$x = 110$$

Exercícios de aplicação:

1. Determine o ponto de nivelamento (ou ponto crítico), e esboce os gráficos da função receita e custo em cada caso:

a) $R(x)=4x \ e \ \mathrm{C}(x)=50+2x$

b) $R(x)=200x \ e \ \mathrm{C}(x)=10.000+150x$

c) $R(x)=\frac{1}{2}x \ e \ \mathrm{C}(x)=20+2x$

2. Obtenha as funções lucro em cada caso do exercício anterior, esboce seu gráfico e faça o estudo do sinal.

3. Uma editora vende certo livro por $ 60,00 a unidade. Seu custo fixo é $ 10.000,00 por mês. E o custo variável por unidade é $ 40,00. Qual o ponto de nivelamento?

4. Em relação ao exercício anterior, quantas unidades a editora deverá vender por mês para ter um lucro mensal de $ 8.000,00?

5. O custo de fabricação de um produto é $ 1.000,00 por mês, e o custo variável por unidade é $ 5,00. Se cada unidade for vendida por $ 7,00:

a) Qual o ponto de nivelamento?
b) Se o produtor conseguir reduzir o custo variável por unidade em 20 % , a custa do aumento do custo fixo na mesma porcentagem, qual o novo ponto de nivelamento?
c) Qual o aumento no custo fixo necessário para manter inalterado o ponto de nivelamento (em relação ao item a) quando o custo variável por unidade é reduzido em 30 %?

10.2. Função Demanda e Oferta

A **demanda** é a quantidade do bem que os consumidores pretendem adquirir num certo intervalo de tempo.
A demanda de um bem é função de várias variáveis: preço por unidade do produto, renda do consumidor, preços de bens substitutos, gastos e outros. Supondo – se que todas as variáveis mantenham – se constantes, exceto o preço unitário do próprio produto (p), verifica – se que o preço *p* relaciona – se com a quantidade demandada *x*. Chama – se função de demanda a relação entre *p* e *x* indicada por $p = f(x)$

Exemplo. O número de sorvetes x demandados por semana numa sorveteria relaciona – se com o preço unitário p de demanda $p=10-0{,}002x$.
Assim se o preço por unidade for R$ 4,00, a quantidade x de demanda por semana será dada por:

$$p=10-0{,}002x$$

$$4=10-0{,}002x$$

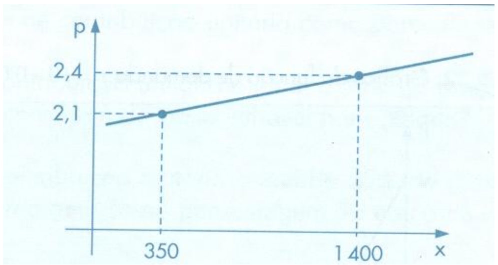
$$x=3000$$

A oferta de um bem, num certo intervalo de tempo, à quantidade do bem que os vendedores desejam oferecer no mercado. A oferta depende de varias variáveis: preço do bem, preços dos insumos utilizados na produção, tecnologia utilizada e outros. Mantidas constantes todas as variáveis exceto o preço do próprio bem, chamamos de função de oferta à relação entre o preço do bem p e a quantidade ofertada x e o indicamos por $p = g(x)$

Exemplo: Admitamos que, para quantidades que não excedam sua capacidade de produção, a função de oferta da sorveteria do exemplo anterior, seja do 1º grau. Suponhamos que, se o preço por sorvete for R$ 2,10 a quantidade ofertada será 350 por semana, e, se o preço for de R$ 2,40, a quantidade ofertada será de 1400. Vamos obter a função de oferta:

Pelo gráfico abaixo podemos obter o coeficiente angular da reta $m = \frac{1}{3500}$ e a equação da reta

$p - 2{,}1 = \frac{1}{3500}(x - 350)$, ou seja $p = \frac{1}{3500}x + 2$



Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 66

Ponto de Equilíbrio do Mercado é o ponto de intersecção entre as curvas de demanda e oferta.

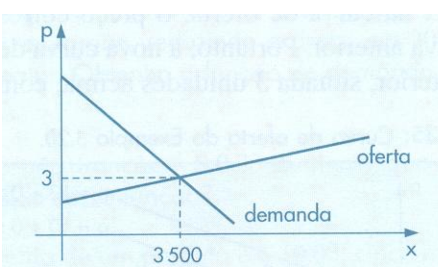
Exemplo: Considere a função de demanda por sorvetes $p = 10 - 0{,}002x$ e a função de oferta de sorvetes $p = \frac{1}{3500}x + 2$

Observando o gráfico abaixo: No ponto de equilíbrio, o preço é o mesmo na curva de demanda e de oferta, ou seja na intersecção. Logo:

$$\frac{1}{3500}x + 2 = 10 - 0{,}002x$$

$$x + 7000 = 35000 - 7x$$

$$8x = 28000 \quad \rightarrow \quad x = 3500$$



Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 67

Como determinamos a quantidade de sorvetes do ponto de equilíbrio podemos determinar o seu preço, que será:

$$p = \frac{1}{3500}x + 2$$

$$p = \frac{1}{3500} \cdot 3500 + 2 \qquad \rightarrow \qquad p = 3$$

Exercícios de aplicação:

1. Num estacionamento para automóveis, o preço por dia, de estacionamento é \$ 20,00. A esse preço estacionam 50 automóveis por dia. Se o preço cobrado for \$ 15,00, estacionarão 75 automóveis. Admitindo que a função de demanda seja do 1º grau, obtenha essa função.

2. Uma empresa vende 200 unidades de um produto por mês, se o preço unitário é \$ 5,00. A empresa acredita que, reduzindo o preço em 20 %, o número de unidades vendidas será 50 % maior, Obtenha a função de demanda admitindo-a como função do 1º grau.

3. Determine o preço de equilíbrio de mercado nas seguintes situações:

a) oferta $p = 10 + x$
demanda $p = 20 - x$

b) oferta $p = 3x + 20$
demanda $p = 50 - x$

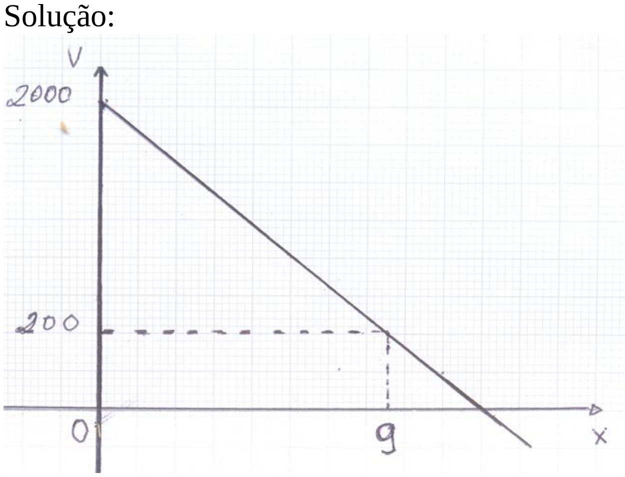
10.3. Depreciação Linear

Devido ao desgaste, obsolescência e outros fatores, o valor de um bem diminui com o tempo. A essa perda de valor denominamos de **Depreciação.**

Exemplo: O valor de um equipamento hoje é R\$ 2000,00 e daqui a 9 anos será R\$ 200,00. Admitindo depreciação Linear:

a) Qual o valor do equipamento daqui a 3 anos?
b) Qual o total de sua depreciação daqui a 3 anos?
c) Daqui a quanto tempo o valor da máquina será nulo?

Solução:



Solução: $m = \frac{200 - 2000}{9 - 0} = -\frac{1800}{9} = -200$

$$V - 200 = 200(t - 9)$$

$$V = -200t + 2000$$

a) $V = -200t + 2000$

$V = -200 \cdot 3 + 2000 = 1400$

b) $depreciação = 2000 - 1400 = 600$

c) $V = -200t + 2000$

$-200x + 2000 = 0$

$t = 10$ anos

10.4. Função Consumo e Função Poupança

Suponhamos que uma família tenha uma renda disponível (renda menos os impostos) variável mês a mês, e uma despesa fixa de R$ 1200,00 por mês. Suponha também que essa família gaste em consumo de bens e serviços 70% de sua renda disponível, além do valor fixo de R$ 1200,00. Assim, chamando de C o consumo e Y a renda disponível, teremos:

$C = 1200 + 0,7Y$ Função Consumo

A diferença entre a **renda disponível** e o **consumo** é o que chamamos de **Poupança,** indicada por **S.**

$S = Y - C$ $\quad$ $S = Y - (1200 + 0,7Y)$

$S = 0,3Y - 1200$ Função Poupança que também é função da renda disponível.

Exercícios de aplicação:

1. Dada a função poupança de uma família $S = 0,35Y - 800$, pede-se:

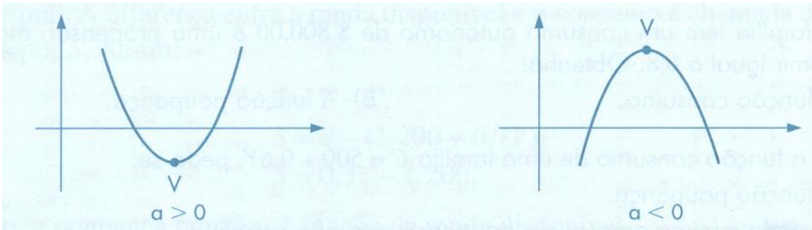
a) A função consumo
b) A renda que induza um consumo de $ 1.450,00.

2. Suponha que tudo que é produzido numa ilha seja consumido nela própria. Não haja gastos com investimentos (visando aumento futuro da capacidade produtiva), nem governo. A função consumo anual é $C = 100 + 0,8Y$. Qual a renda de equilíbrio (aquela para a qual o que é produzido é consumido)?

11. Função Quadrática

Toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais e $a \neq 0$

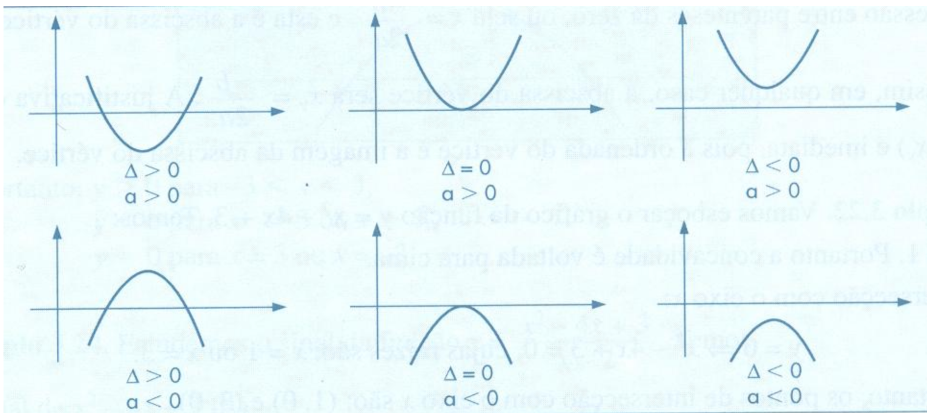
11.1 Gráfico da função quadrática



Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 74

Onde V é o vértice, se $a < 0$ o vértice é um ponto de máximo e se $a > 0$ o vértice é um ponto de mínimo

11.2 Variação do gráfico da função



Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 75

11.3 Coordenadas do Vértice da Parábola

$V(x_v, y_v)$, onde $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

Exercícios de aplicação:

1. Esboce os gráficos das seguintes funções

a) $y = x^2 - 3x + 2$ b) $\begin{cases} y = x^2, \ se\ x \geq 0 \\ y = 2, \ se\ x < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x^2, \ se\ x \geq 0 \\ y = -x^2, \ se\ x < 0 \end{cases}$

2. Estude o sinal das funções do exercício anterior, ache os pontos de máximo ou de mínimo e ainda o conjunto imagem.

3. Dê o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$ b) $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

5. Obtenha os pontos de máximo e de mínimo das seguintes funções, nos domínios indicados:

a) $y = 4x - x^2;\ D = [2, 4]$ b) $y = x^2;\ D = [-1, 1]$

11.4 Funções Receita e Lucro Quadrático

Neste tipo de função o preço pode ser modificado, conseqüentemente alteração da demanda.

Exemplo: Dada a função demanda $p = 20 - 2x$ e a função custo $C = 5 + x$:

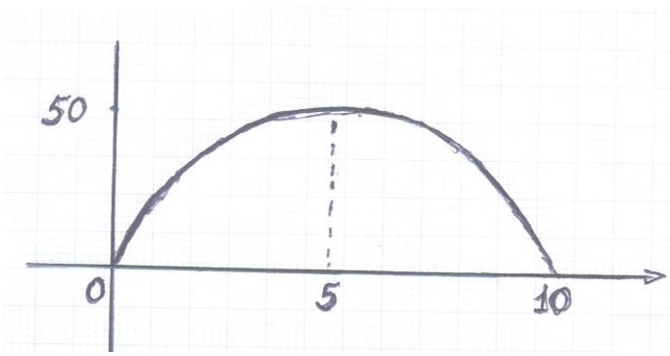
a) Obtenha o valor de x que maximiza a receita.
b) Obtenha o valor de x que maximiza o luro.

Solução: a) $R = px$

$R = (20 - 2x)x$

$R = 20x - 2x^2$

Como a receita é uma função quadrática de x, seu gráfico é do tipo:

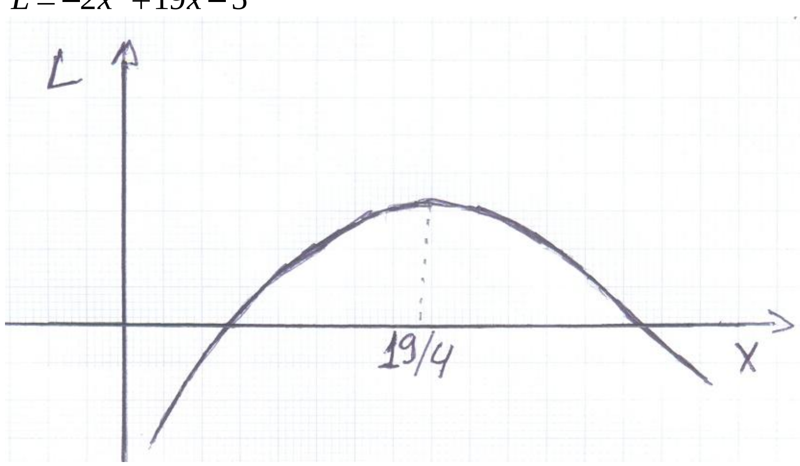


Portanto o valor de x que maximiza R é abscissa do vértice $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2(-2)} = 5$. Como conseqüência , o preço é dado pela função de demanda $p = 20 - 2 \cdot 5 = 10$

c) A função lucro é dada por $L = R - C$, logo podemos escrever:

$L = 20x - 2x^2 - (5 + x)$

$L = -2x^2 + 19x - 5$



O valor de x que maximiza o lucro é a abscissa do vértice da parábola $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-19}{2(-2)} = \frac{19}{4}$

O preço que maximiza o lucro é dado pela função demanda $p = 20 - 2x$

$$p = 20 - 2 \cdot \frac{19}{4} = 20 - 9,5 = 10,5$$

Exercícios de aplicação:

1. Dada a função de demanda $p = 20 - 2x$ e a função custo $C(x) = 5 + x$

a) Obtenha o valor de x que maximiza a receita.
b) Obtenha o valor de x que maximiza o lucro.

2. Uma loja de CD's adquire cada unidade por $ 20,00 e a revende por $ 30,00. Nessas condições a quantidade mensal que consegue vender é 500 unidades. O proprietário estima que, reduzindo o preço de venda para $ 28,00, conseguirá vender 600 unidades por mês.

a) Obtenha a função demanda admitindo que seu gráfico seja linear.
b) Qual o preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro mensal?

12. Equação exponencial

Toda equação da forma $a^x = b$**,** denominamos de equação exponencial

Exemplo: a) $3^x = 27$ b) $3^x = 1$ c) $3^{x-1} = 27$ d) $3^x = 10$ e) $25^x - 4 \cdot 5^x = 5$

Solução:

a) $3^x = 27 \to 3^x = 3^3$, logo $x = 3$

b) $3^x = 1 \to 3^x = 3^0$, logo $x = 0$

c) $3^{x-1} = 27 \to 3^{x-1} = 3^3$, logo $x - 1 = 3$, daí, $x = 4$

d) $3^x = 10 \to \log 3^x = \log 10$ logo $x = \dfrac{\log 10}{\log 3}$

e) $25^x - 4 \cdot 5^x = 5 \to \left(5^2\right)^x - 4 \cdot 5^x = 5 \to \left(5^x\right)^2 - 4 \cdot 5^x = 5$

Fazendo $5^x = y$ temos $(y)^2 - 4 \cdot y = 5 \to y^2 - 4y - 5 = 0$

Resolvendo a equação do 2º em y temos:

$y^2 - 4y - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$

$\Delta = 16 + 20$

$\Delta = 36$

$\sqrt{\Delta} = 6$

$y = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$; $y_1 = \dfrac{4-6}{2} = -1$; $y_2 = \dfrac{4+6}{2} = 5$

$5^x = -1$ não definido , $5^x = 5 \to x = 1$

Exercícios de aplicação:

1. Mensalmente a produção em toneladas de certa indústria é dada pela expressão $y = 100 - 100.4^{-0,05x}$, na qual x é o número de meses contados a partir de uma certa data. Após quantos meses a produção atingirá a marca de 50 toneladas?

13. Função Exponencial - Modelo de Crescimento Exponencial

Considere um capital de $ 10.000,00, aplicado a juros compostos a taxa de 3% ao mês num período de 8 meses. Qual o montante no final do período?
No 1º mês o juro é de $j = 10000 \cdot 0,03 = 300$ e o montante será de $M = 10000 + 300 = 10300$
No 2º mês o jura é de $j = 10300 \cdot 0,03 = 309$ e o montante será de $M = 10300 + 309 = 10609$
Assim por diante.

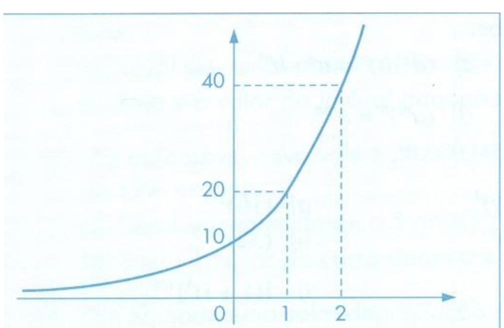
Podemos aplicar neste cálculo a função exponencial da seguinte maneira:

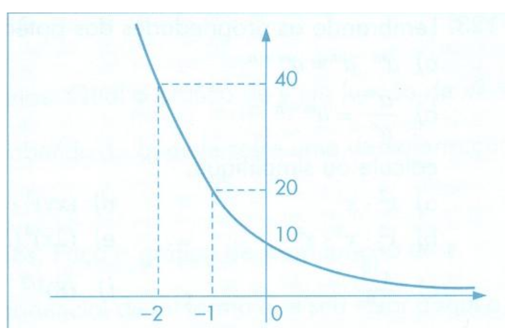
$y(x) = y_0 (1+k)^x$, onde:

$y(x)$ é o montante em qualquer instante
y_0 é o capital inicial
k é a taxa de variação
x é o período

Aplicando ao problema acima temos:
$y(x) = y_0 (1+k)^x$
$y(x) = 10000(1+0,03)^8$
$y(8) = 12667,70$
Quando $(1+k) > 1$ a função é crescente.
Quando $(1+k)$ está entre 0 e 1 a função é decrescente, como mostra as figuras abaixo.

14. Gráfico da função





Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 95

função crescente função decrescente

Exercícios de aplicação:

1. O número de habitantes de uma cidade é hoje igual a 7.000 e cresce exponencialmente a uma taxa de 3 % ao ano
a) Qual o número de habitantes daqui a 8 anos?
b) Qual o número de habitantes daqui a 30 anos?

2. Um imóvel vale hoje $ 150.000,00 e a cada ano sofre uma desvalorização de 3 % ao ano.

a) Qual o seu valor daqui a 10 anos?
b) Seja y o valor do imóvel daqui a x. Qual o gráfico de y em função de x?

3. Um equipamento sofre depreciação exponencial de tal forma que seu valor daqui a t anos será $V = 6.561.\left(\frac{1}{3}\right)^t$.
a) Qual o seu valor hoje?
b) Qual o seu valor daqui a 5 anos?
c) Qual será a depreciação total nessa data?
d) Faça o gráfico de V em função de t?

14. Logaritmos

Definição:

Logaritmo de um número N na base a é o expoente y que colocamos em a para dar o número N.
$\log_a N = y \Leftrightarrow a^y = N$, para $N > 0$ e $0 < a < 1$ e $a > 1$
A base mais usada é a base 10 (dez) e o logaritmo é chamado de logaritmo Decimal, outa base bastante usada principalmente na engenharia é a base ***e* (número de Euler,** é uma importante constante matemática, cujo valor aproximado é 2,718) e o logaritmo é chamado **naturais** ou **neperiano.**

Exemplos:

$\log_2 32 = 5,$ pois $2^5 = 32$

10.1 Propriedades dos logaritmos

(P1) $\log_a A.B = \log_a A + \log_a B$

P2) $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$

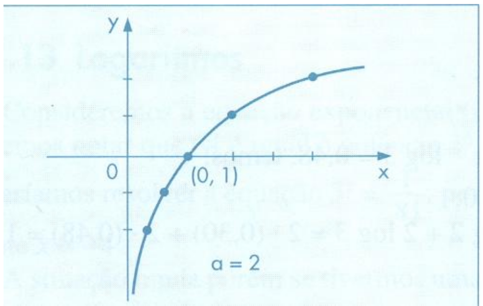
(P3) $\log_a A^\alpha = \alpha \log_a A$

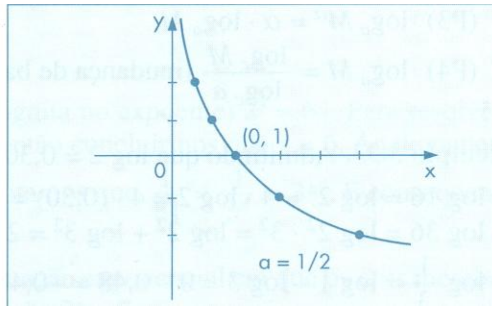
(P4) $\log_a A = \frac{\log_b A}{\log_b a}$ (Mudança de Base)

10.2 Gráfico da função.

$f(x) = \log_a x$

Para $a > 1$ a função é crescente figura (i), para $0 < a < 1$ a função é decrescente figura (ii).





Fonte: MORETTI Pedro A. 2003, p. 100

figura (i) figura (ii)

Exercícios de aplicação:

1. Admitindo $\log 2 = 0,3 \; e \; \log 3 = 0,48$, resolva as equações exponenciais:

a) $3^x = 2$ b) $4^x = 3$ c) $2^x = 9$ d) $6^x = 8$ e) $6^x = 20$ f) $4^x = 0,3$ c) $2^x = 12$

2. O número de habitantes de uma cidade é hoje igual a 7.000 e cresce à taxa 3 % ao ano. Daqui a quanto tempo a população dobrará?
Dados: $\log 2 = 0,3010 \; e \; \log 1,03 = 0,0128$

Aplicações em juros compostos.

1. Um capital de \$ 2.000,00 é aplicado a juros compostos durante 4 meses à taxa de 1,8 % ao mês. Qual o montante?

2. Uma pessoa aplica hoje \$ 1.000,00 e aplicará \$ 2.000,00 daqui a 3 meses a juros compostos à taxa de 2,5 % ao mês. Qual seu montante daqui a 6 meses?

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA:
SAFIER. Fred. Teoria e problemas de Pré – Cálculo, Coleção Schaum. 1ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2003
MORETTI Pedro A., HAZZAN. Samuel, BUSSAB. Wilton de O. Cálculo – Funções de uma e várias variáveis – S. Paulo – Editora Saraiva, 2003